5장. 뉴턴 법칙의 응용 -원운동

3.4 분석 모형: 등속 원운동하는 입자

3.5 접선 가속도와 지름 가속도

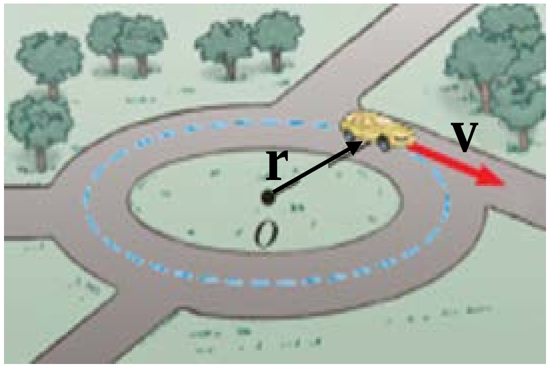
5.2 등속 원운동하는 입자 모형의 확장

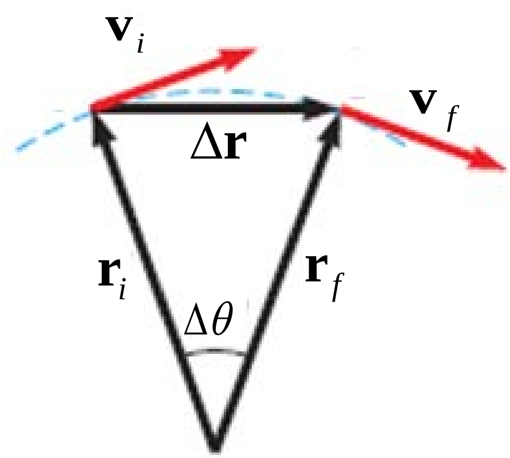
5.3 비등속 원운동

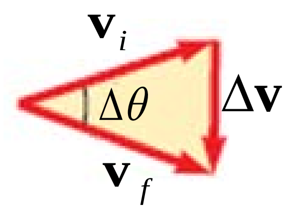
3.4 분석 모형: 등속 원운동하는 입자
Analysis Model: Particle in Uniform Circular Motion

등속 원운동: 일정한 속력으로 원주 위를 움직이는 운동

$\boxed{\mathbf{r} \perp \mathbf{v}}$ $\quad |\mathbf{v}| = v\,(\text{일정})$







$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{r}, \quad |\Delta\mathbf{v}| = \frac{v}{r}|\Delta\mathbf{r}|.$$

$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad |a_{avg}| = \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$$\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} \to v \qquad \Delta\mathbf{v} \to -|\Delta\mathbf{v}|\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_{avg} \to -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

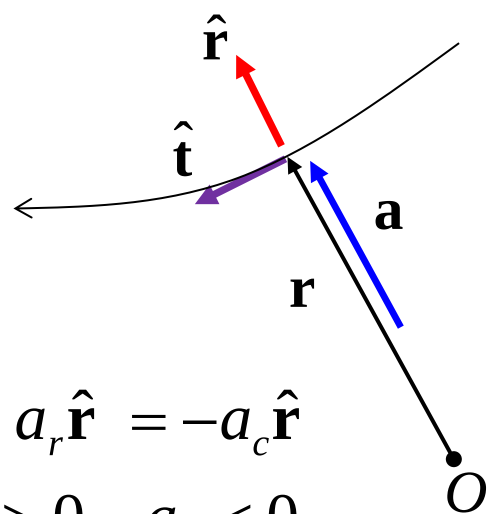
$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$:구심 가속도

등속 원운동에서 입자의 주기 T

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}}$$

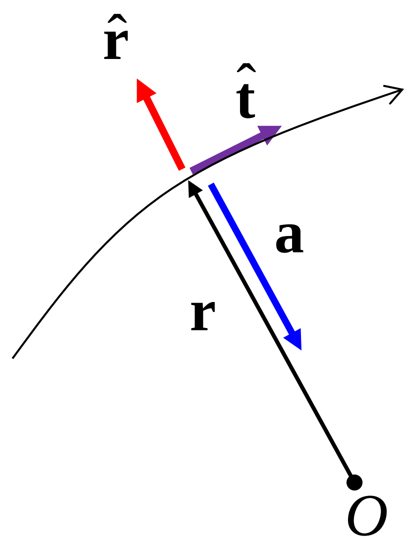
지름방향, 구심 방향 그리고 접선 방향



$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} \;\; = -a_c \hat{\mathbf{r}}$$

$$a_r > 0, \;\; a_c < 0$$

$$\boxed{a_r = -a_c}$$



$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} \;\; = -a_c \hat{\mathbf{r}}$$

$$a_r < 0, \;\; a_c > 0$$

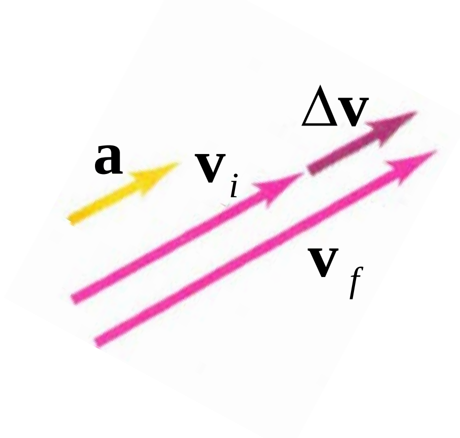
3.5 접선 및 지름 가속도
Tangential and Radial Acceleration

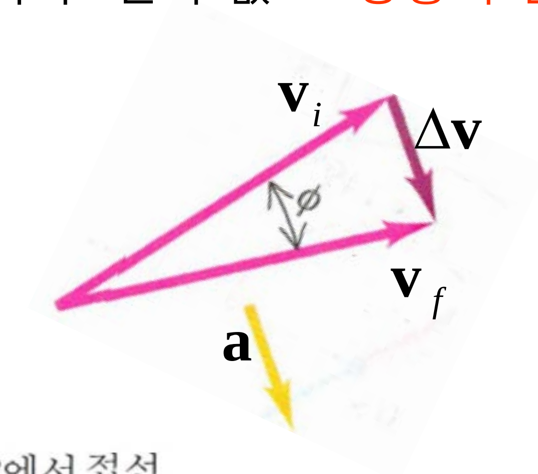
가속도의 속도와 나란한 성분과 수직인 성분

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}$$

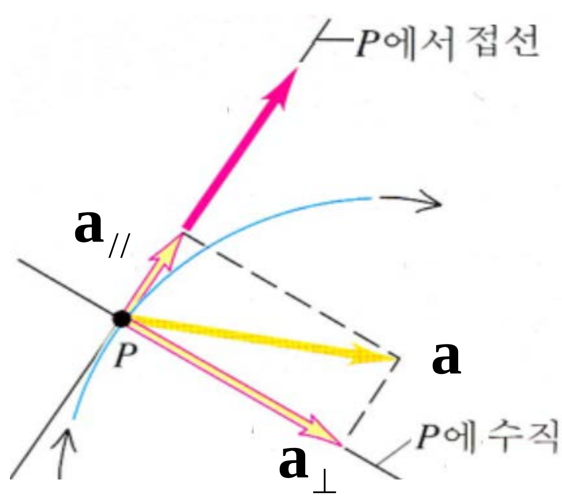
속도 v가 가속도 a 와 평행하면 v의 크기가 변한다.

속도 v가 가속도 a 와 수직하면 v의 크기가 변화 없고 방향이 변한다.





$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{//} + \mathbf{a}_{\perp}$$

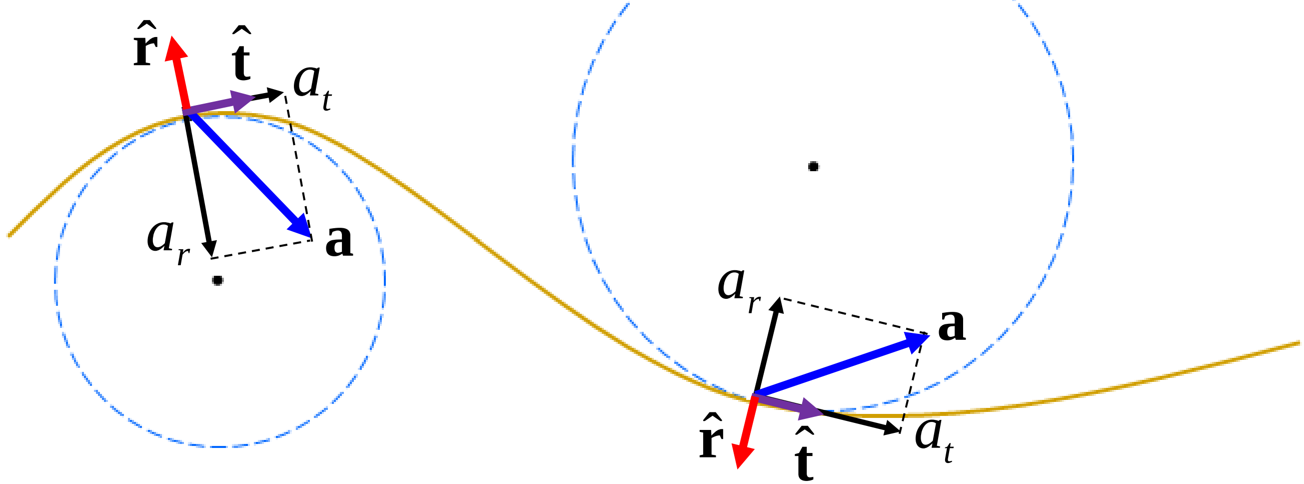


가속도의 접선 성분과 지름 성분

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$\hat{\mathbf{t}}$: 접선방향의 단위 벡터

$\hat{\mathbf{r}}$: 지름방향의 단위 벡터



접선 가속도

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,|\,\mathbf{v}\,|}{dt}$$

⇨ 속력 변화

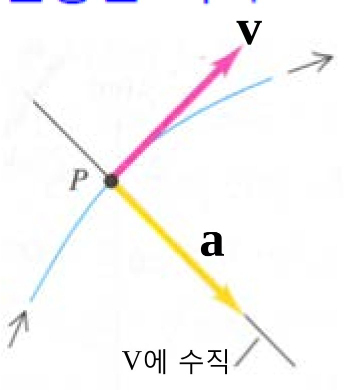
지름 가속도

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

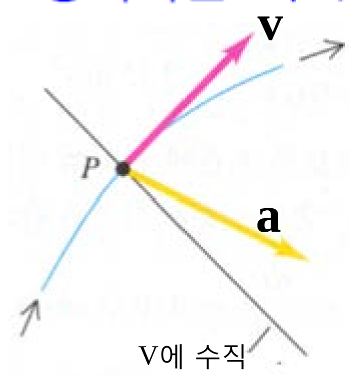
⇨ 속도의 방향 변화

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \\ a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \\ a_t = \frac{d\,|\,\mathbf{v}\,|}{dt},\ a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \end{gathered}}$$

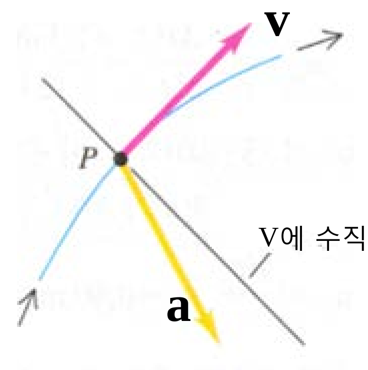
일정한 속력



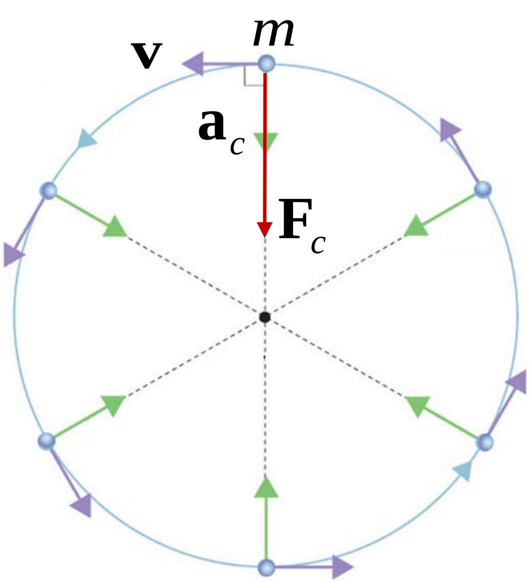
증가하는 속력



감소하는 속력



등속 원운동의 구심 가속도와 구심력



r :원의 반지름

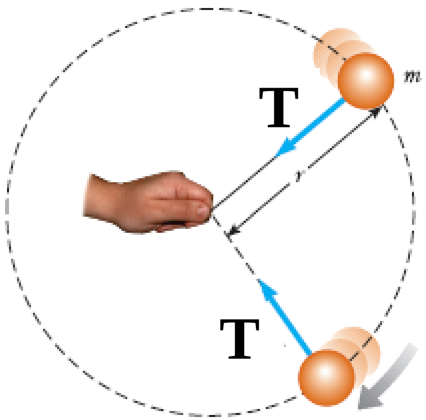
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_c$$

$$\mathbf{F}_c = m\mathbf{a}_c$$

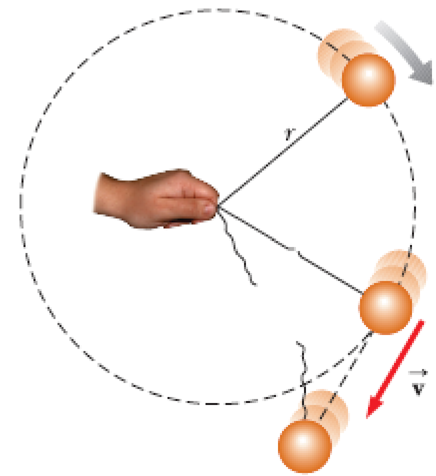
$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

수평면에서 실에 묶여 원 운동하는 물체



구심력 : 실의 장력

실이 끊기면



예제 5.4 얼마나 빨리 돌 수 있나?

질량 0.500 kg인 퍽이 길이 1.50 m인 밧줄 끝에 붙어 있다. 이 퍽은 수평면 위의 원을 따라 돌고 있다. 밧줄이 50.0 N의 최대 장력을 버틸 수 있다면, 밧줄이 끊어지지 않고 돌 수 있는 퍽의 최대 속력은 얼마인가? 줄은 운동의 전 과정에서 수평으로 유지된다고 가정한다.

줄의 장력이 구심력이 된다.

$$T = m\frac{v^2}{r} \quad \le T_{\max} = 50.0\text{N}$$

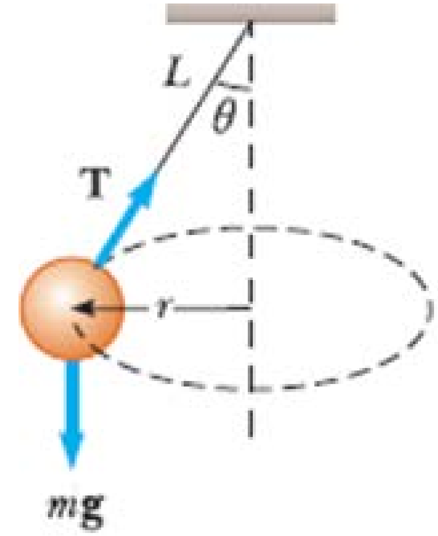
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{rT_{\max}}{m}}$$

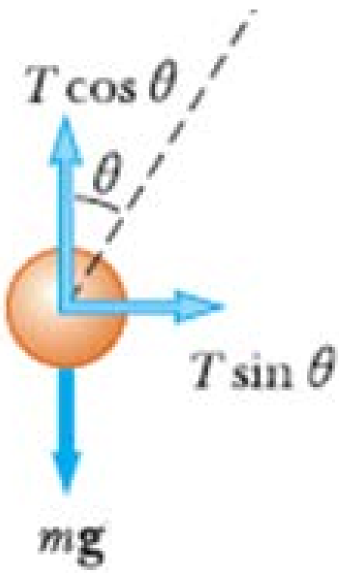
$$v \le \sqrt{\frac{rT_{\max}}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1.5\text{m})(50\text{N})}{0.500\text{kg}}} = 12.2\text{m/s}$$

예제 5.5 원뿔 진자

질량 m인 작은 공이 길이 L인 끈에 매달려 있다. 그림처럼 이 공은 수평면에서 반지름 r인 원 위를 일정한 속력 v로 돌고 있다. 진자의 속력 v에 대한 식을 구하라.





$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

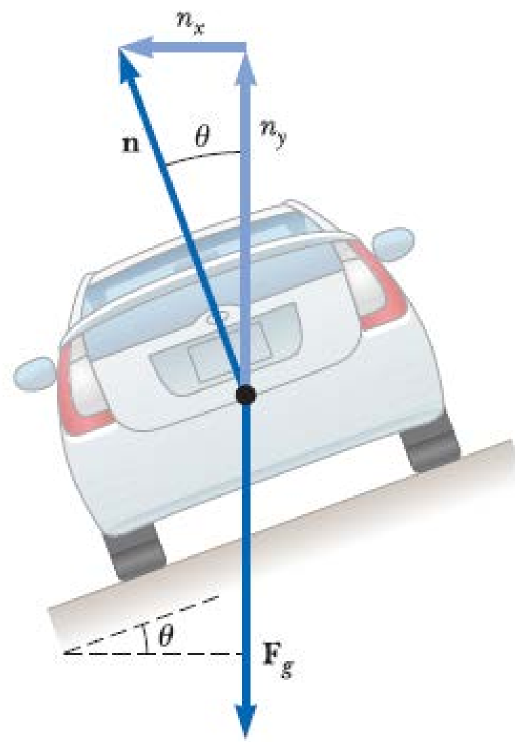
$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= mg \\ T\sin\theta &= \frac{mv^2}{r} \end{aligned}\right\} \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore v = \sqrt{rg\tan\theta} \xrightarrow{r = L\sin\theta} \boxed{v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}}$$

예제 5.7 옆으로 경사진 길

도로가 미끄러워도 곡선 길을 안전하게 달릴 수 있는 경사진 도로를 설계 하고자 한다. 이런 길의 설계 속력이 13.4 m/s이고 곡선 도로의 곡률 반지름이 35.0 m라 할 때 이 길은 얼마나 안쪽으로 기울어져야 하는가?

마찰이 없다고 가정하자. 경사진 도로에서 수직항력의 수평성분 n_x가 구심력이 된다



$$n_x = n\sin\theta$$

구심(지름) 방향에 대해

$$n\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

연직 방향에 대해

$$\Sigma F_y = n\cos\theta - mg = 0$$

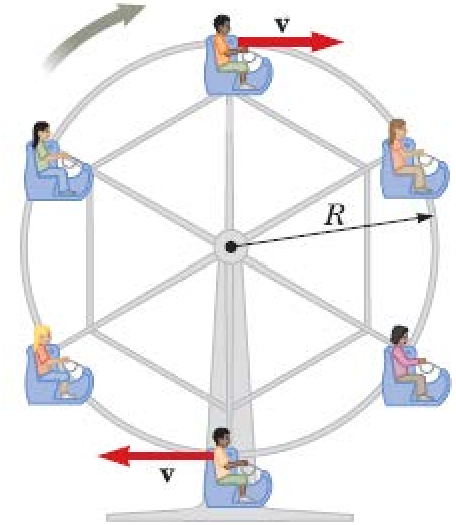
$$n\cos\theta = mg$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{gr}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4\text{m/s})^2}{(9.80\text{m/s}^2)(35.0\text{m})}\right) = 27.6^{\text{o}}$$

예제 5.8 회전식 관람차

질량 m인 어린이가 그림처럼 회전식 관람차를 타고 있다. 어린이는 반지름이 10.0 m인 연직 원 위를 3.00 m/s의 일정한 속력으로 운동한다. **(A)**관람차가 연직 원의 궤도의 맨 아래에 있을 때 / **(B)** 맨 꼭대기에 있을 때 좌석이 이 어린이에게 작용하는 힘을 구하라.



(A)

$$\Sigma F = n_{bot} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

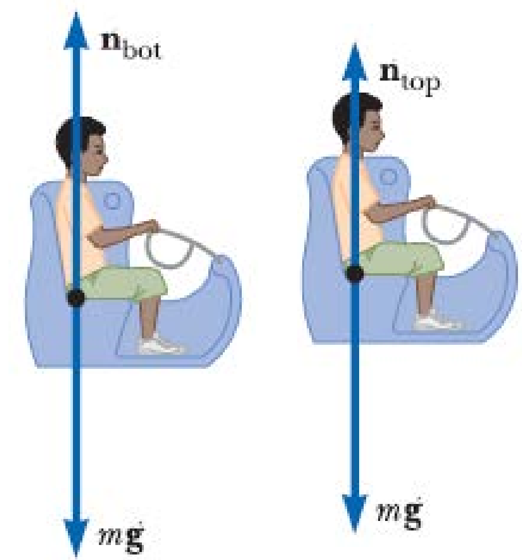
$$n_{bot} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{gr}\right)$$

$$n_{bot} = mg\left(1 + \frac{(3.0\text{m/s})^2}{(9.80\text{m/s}^2)(10.0\text{m})}\right) = 1.09mg$$

(B)

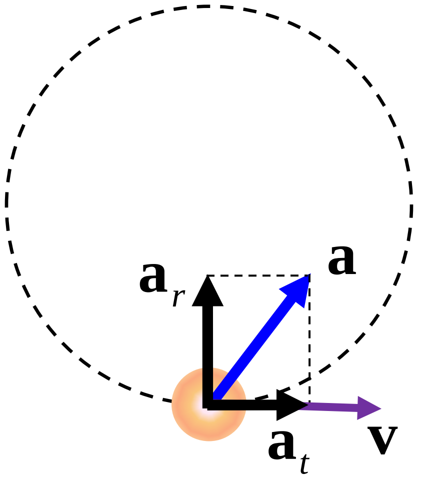
$$\Sigma F = mg - n_{top} = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{top} = mg - m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 - \frac{v^2}{gr}\right) = 0.91mg$$



5.3 비등속 원운동
Nonuniform Circular Motion

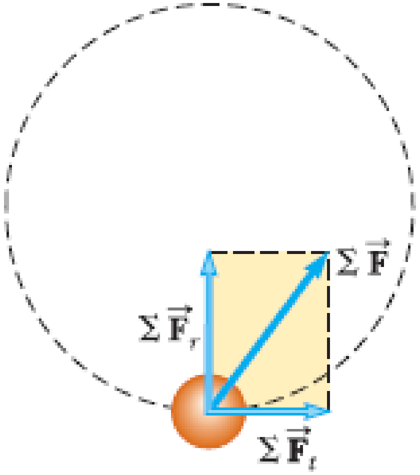
일정하지 않은 속력의 로 원형궤도를 그리는 원운동의 가속도:
지름 성분 외에 접선 성분 존재



$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$$a_r = -\frac{v^2}{r}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,|\mathbf{v}|}{dt}$$

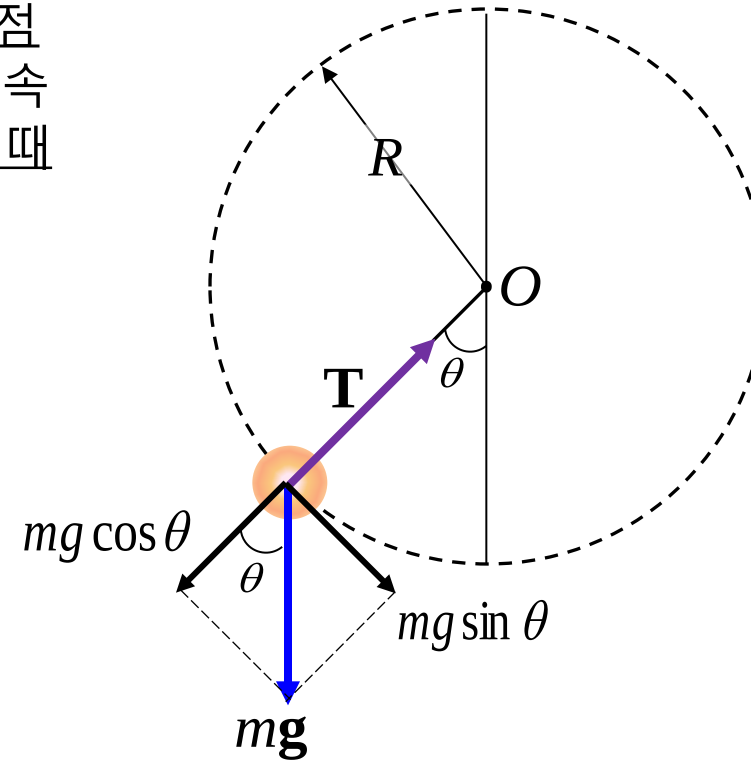
$$m\mathbf{a} = m\sum \mathbf{F}$$



$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_r + \sum \mathbf{F}_t$$

예제 5.9 공에 주목

m인 작은 구가 길이 R의 줄 끝에 매달려 고정된 점 O를 중심으로 수직 원운동을 하고 있다. 이 구의 속력이 v이고 줄이 수직 방향과 각 θ를 이루고 있을 때 줄의 장력을 구하라.



접선 방향에 대해

$$\Sigma F_t = mg\sin\theta = ma_t$$

$$\boxed{a_t = g\sin\theta}$$

지름 방향에 대해

$$\Sigma F_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$\boxed{T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos\theta\right)}$$

$$T_{top} = mg\left(\frac{v_{top}^2}{Rg} - 1\right)$$

$$T_{bot} = mg\left(\frac{v_{bot}^2}{Rg} + 1\right)$$