

3장. 이차원에서의 운동

3.1 위치, 속도 및 가속도 벡터

3.2 이차원 등가속도 운동

3.3 포물체 운동

3.6 상대 속도와 상대 가속도

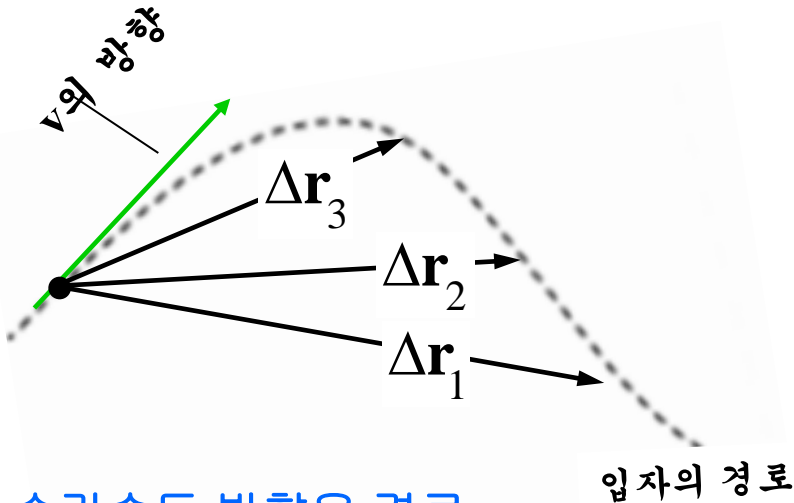
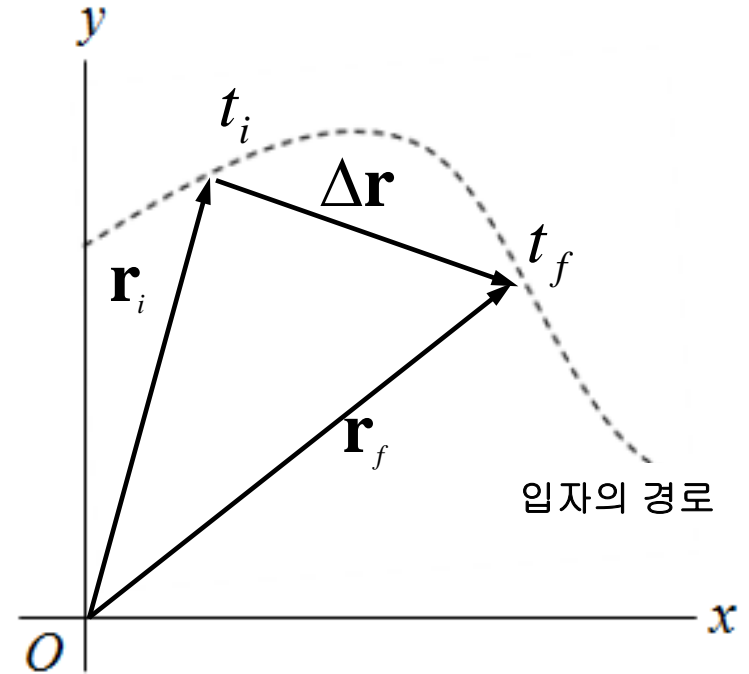
3.1 위치, 속도, 가속도 벡터

The Position, Velocity, and Acceleration Vectors

위치 벡터 $\mathbf{r} \equiv x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$

변위 $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$

평균속도 $\mathbf{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$



순간속도 방향은 경로에서 접선 방향

순간속도

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$

3.2 이차원 등가속도 운동

Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration

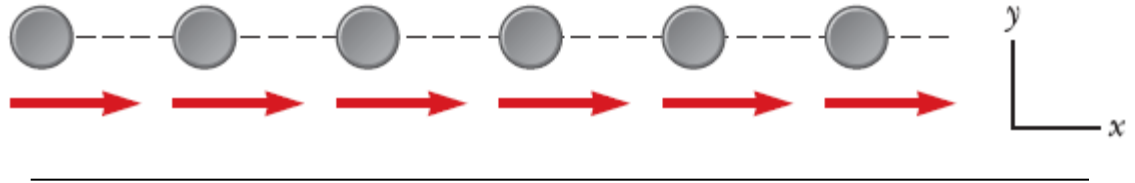
이차원 운동은 x 와 y 축 방향의 각각 독립된 두 개의 운동으로 기술될 수 있다.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

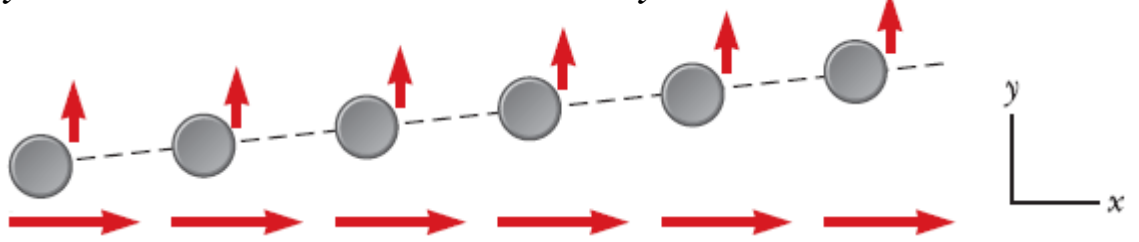
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

에어 테이بل을 가로질러 x 방향으로 등속 운동하는 하키 퍽



y 방향으로 바람이 휘 분 후 퍽은 y 성분의 속도를 얻는다.



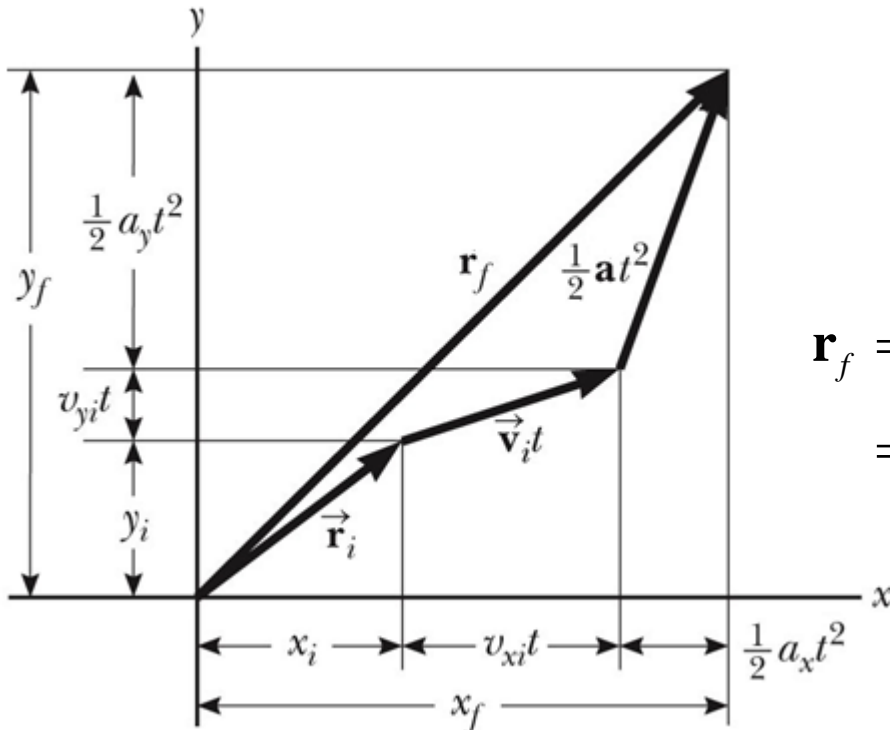
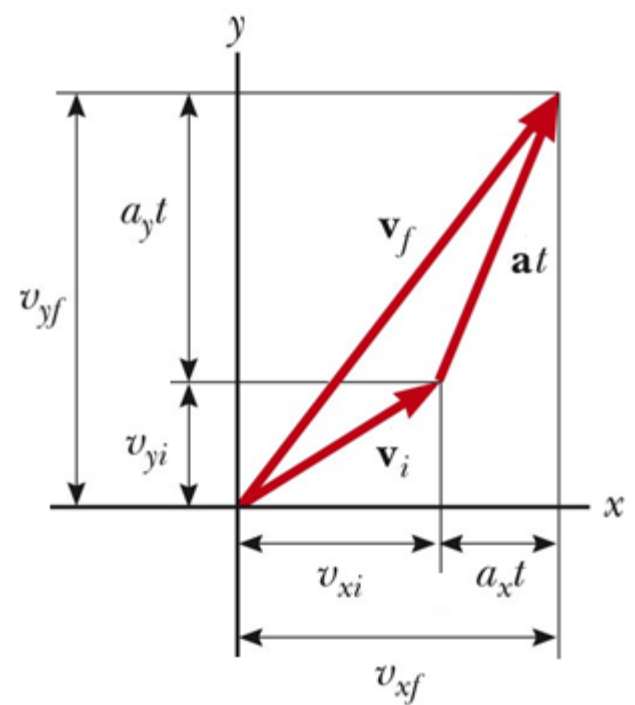
등가속도 운동의 경우

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$\mathbf{v}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$



$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$\mathbf{r}_f = (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

예제 3.1 평면에서의 운동

xy 평면에서 입자가 시간 $t = 0$ 일 때, x 성분은 20 m/s , y 성분은 -15 m/s 의 처음 속도로 원점에서 운동하기 시작한다. 이 입자는 x 성분의 가속도 a_x 4.0 m/s^2 으로 운동한다. (A) 임의의 시간에서 전체 속도 벡터를 구하라. 시간 $t = 5.0 \text{ s}$ 일 때 입자의 속도와 속력, 속도 벡터가 x 축과 이루는 각도를 구하라. (C) 임의의 시간 t 에서 입자의 x 및 y 좌표와 그 시간에서 입자의 위치 벡터를 구하라.

$$v_{xi} = 20 \text{ m/s}, v_{yi} = -15 \text{ m/s}, a_x = 4.0 \text{ m/s}^2, a_y = 0, x_i = y_i = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \mathbf{v}_f &= v_{xf} \hat{\mathbf{i}} + v_{yf} \mathbf{j} \\ &= (v_{xi} + a_x t) \hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t) \mathbf{j} \end{aligned}$$

속도는 m/s , 시간은 s 의 단위로 주어진 값들을 대입한다.

$$\mathbf{v}_f = (20 + 4.0t) \hat{\mathbf{i}} - 15 \mathbf{j}$$

$$\text{(B)} \quad t = 5.0 \text{ s일 때} \quad \mathbf{v}_f = 45 \hat{\mathbf{i}} - 15 \mathbf{j}$$

\mathbf{v}_f 와 x 가 이루는 각을 θ 라고 하면

$$\tan \theta = \frac{v_{yf}}{v_{xf}} = \frac{-15 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}} = -0.375$$

$$\theta = \tan^{-1}(-0.375) = -21^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad x_f &= x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_f &= y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned}$$

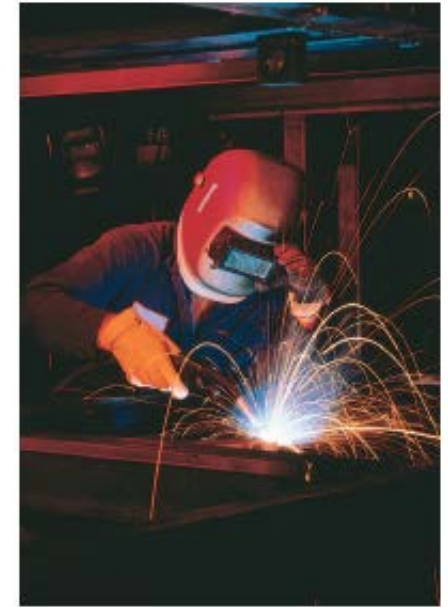
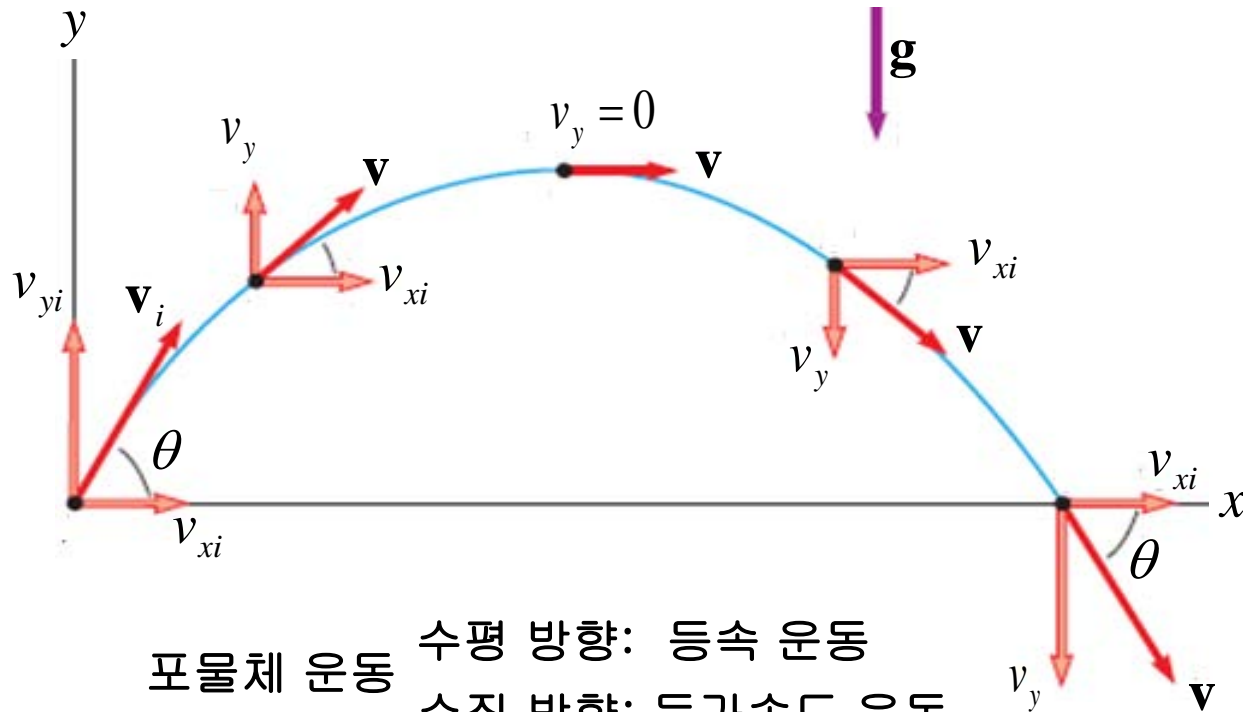
의 두식에 가속도는 m/s^2 , 속도는 m/s , 시간은 s 의 단위로 주어진 값들을 대입한다.

$$x_f = 20t + 2.0t^2$$

$$y_f = -15t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_f &= x_f \hat{\mathbf{i}} + y_f \mathbf{j} \\ &= (20t + 2.0t^2) \hat{\mathbf{i}} - 15t \mathbf{j} \end{aligned}$$

3.3 포물체 운동 Projectile Motion



포물체 운동 수평 방향: 등속 운동
 수직 방향: 등가속도 운동

초기조건 : $t = 0, x_i = y_i = 0, v_{xi} = v_i \cos \theta, v_{yi} = v_i \sin \theta$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$v_x = v_i \cos \theta$$

$$v_y = v_i \sin \theta - gt$$

$$x = v_i \cos \theta \cdot t$$

$$y = v_i \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$$

최고점 도달 시간과 최대 높이

$$\begin{cases} v_x = v_i \cos \theta & \begin{cases} v_y = v_i \sin \theta - gt \\ x = v_i \cos \theta \cdot t \\ y = v_i \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases} \\ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$y = h, v_y = 0 \text{ @ } t = t_A$$

$$v_y = v_i \sin \theta - gt_A = 0$$

$$\therefore t_A = \frac{v_i \sin \theta}{g}$$

$$h = (v_i \sin \theta) \frac{v_i \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$\therefore h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

수평도달거리

$$x = v_i \cos \theta \cdot t$$

$$x = R, y = 0 \text{ @ } t = t_B$$

$$y = v_i \sin \theta \cdot t_B - \frac{1}{2} gt_B^2 = 0$$

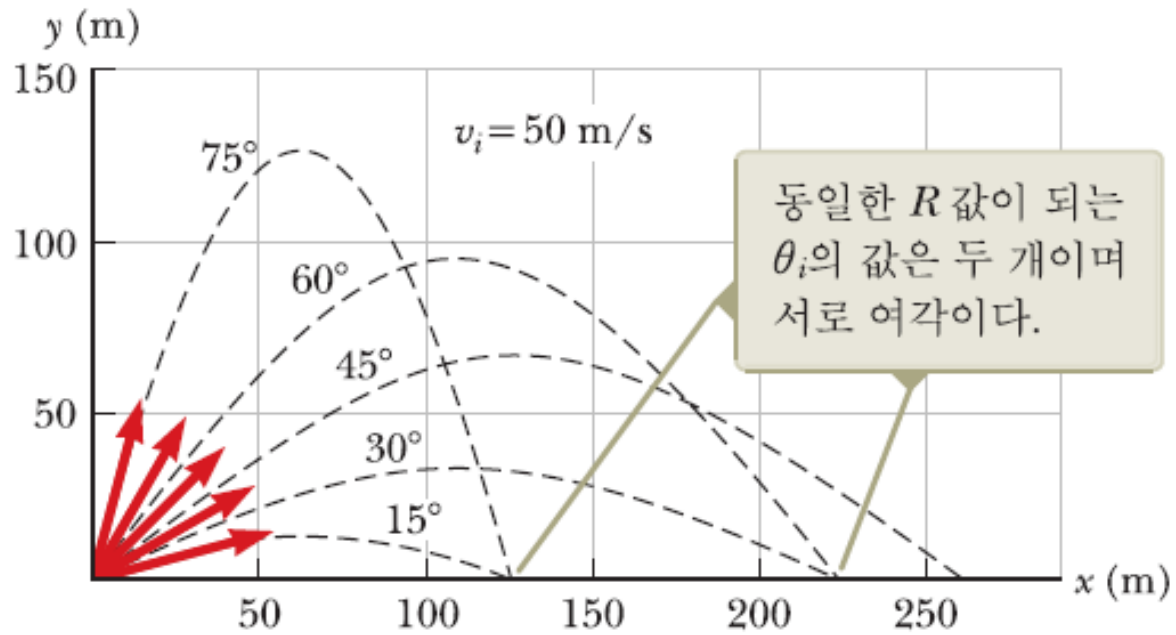
$$\therefore t_B = \frac{2v_i \sin \theta}{g} = 2t_A$$

$$R = v_i \cos \theta \cdot \frac{2v_i \sin \theta}{g}$$

$$\therefore R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta}{g}$$

$\theta_i = 45^\circ$ 일 때 수평도달거리는 최대 값 $R = v_i^2 / g$ 를 갖는다.

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta}{g}$$



예제 3. 2

건물의 옥상에서 수평과 30.0° 의 방향으로 20.0 m/s 의 처음 속력으로 던졌다. 돌을 던진 손의 위치는 지면으로부터 높이 75.0 m 이다. (A) 돌이 지면에 도달하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?

(B) 돌이 지면에 도달하기 직전의 속력은 얼마인가? (단, $g = 10.0 \text{ m/s}^2$.)

$$a_x = 0, a_y = -g = -10.0 \text{ m/s}^2, v_i = 20.0 \text{ m/s}, x_i = y_i = 0, y_f = 75.0 \text{ m}.$$

돌의 속도의 처음 성분은

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \sin 30^\circ = 10.0 \text{ m/s}$$

(A) $y_f = y_i + v_i \sin \theta_i \cdot t + a_y t^2$ 에 주어진 값들을 가속도는 m/s^2 , 속도는 m/s , 시간은 s 의 단위로 대입하면 .

$$45 = 10t - 5t^2.$$

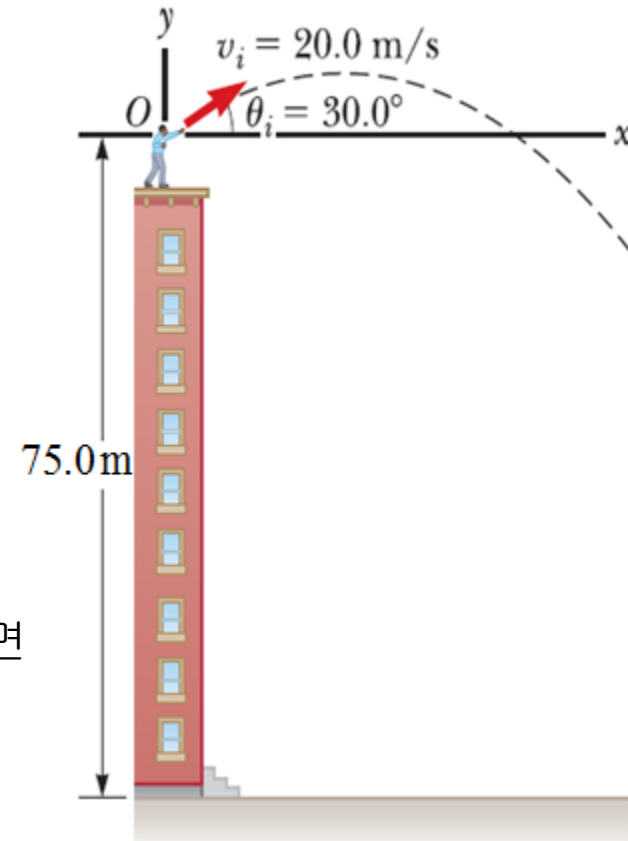
$$t = 5.0 \text{ s}$$

(B) $2a_y(y_f - y_i) = v_{yf}^2 - v_{yi}^2$ 에 주어진 값들을 대입하면

$$2(-10)(-75) = v_{yf}^2 - 10^2, \quad v_{yf}^2 = 1600 (\text{m/s})^2.$$

$$v_{xf} = v_{xi} = 17.3 \text{ m/s}.$$

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{17.3^2 + 1600} \text{ m/s} = 43.6 \text{ m/s}$$



3.6 상대 속도와 상대 가속도

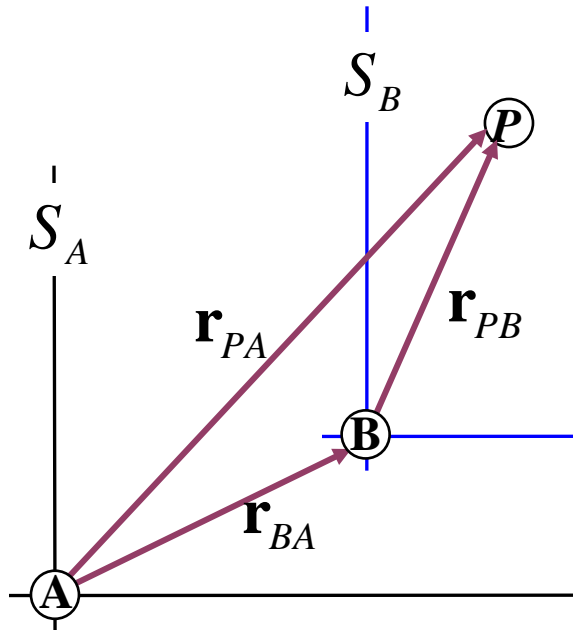
Relative Velocity and Relative Acceleration

관찰자 **A**, **B**가 입자 **P**의 운동을 관측한다.

관찰자 **A**는 기준틀 S_A 에 있고 **B**는 기준틀 S_B 에 있다.

기준틀 S_B 는 S_A 에 대해 속도 \mathbf{v}_{BA} 로 운동한다.

⇔ 관찰자 **B**는 **A**에 대해 속도 \mathbf{v}_{BA} 로 운동한다.



\mathbf{r}_{PA} : **A**에 대한 **P**의 상대적 위치

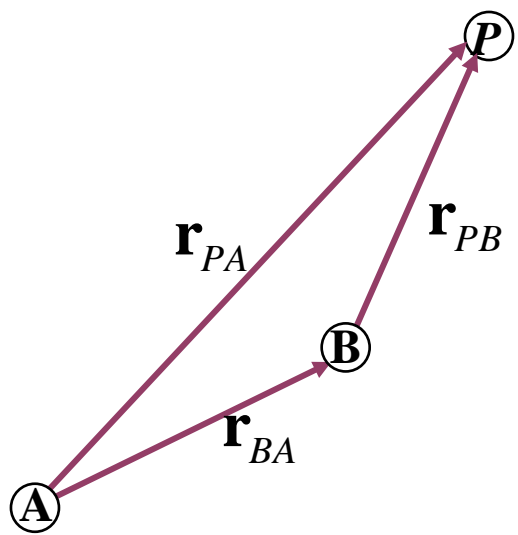
\mathbf{r}_{PB} : **B**에 대한 **P**의 상대적 위치

\mathbf{r}_{BA} : **A**에 대한 **B**의 상대적 위치

$$\mathbf{u}_{PA} = \frac{d\mathbf{r}_{PA}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt} \quad \mathbf{u}_{PB} = \frac{d\mathbf{r}_{PB}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt}$$

$$\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$$

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}$$



$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}$$

$\frac{d}{dt}$ 양변

$$\mathbf{u}_{PA} = \mathbf{u}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$

: 갈릴레이 변환식

$\frac{d}{dt}$ 양변

$$\frac{d\mathbf{u}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_{PB}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt}$$

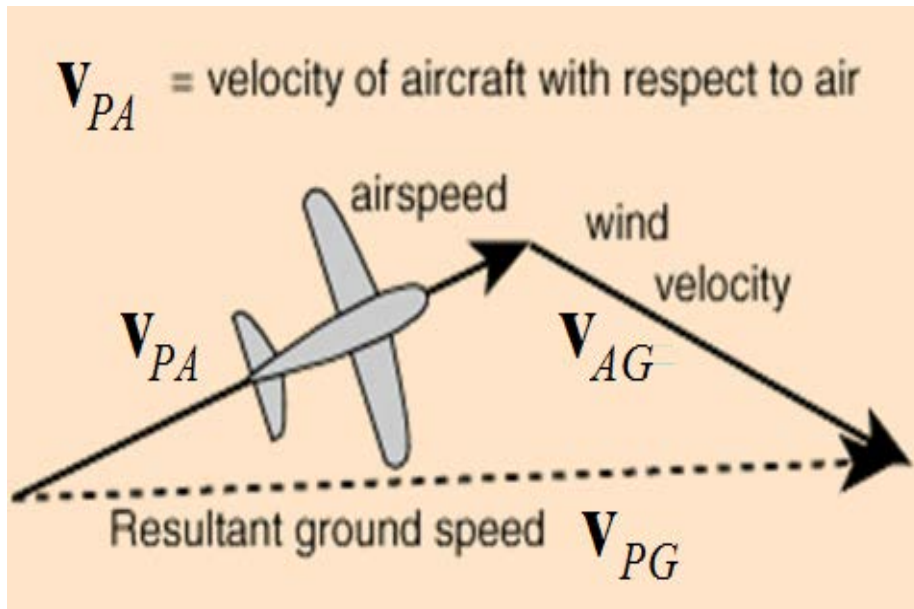
관찰자 A, B가 서로에 대해 일정하게 움직인다고 가정하면 $\iff \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt} = 0$

\implies

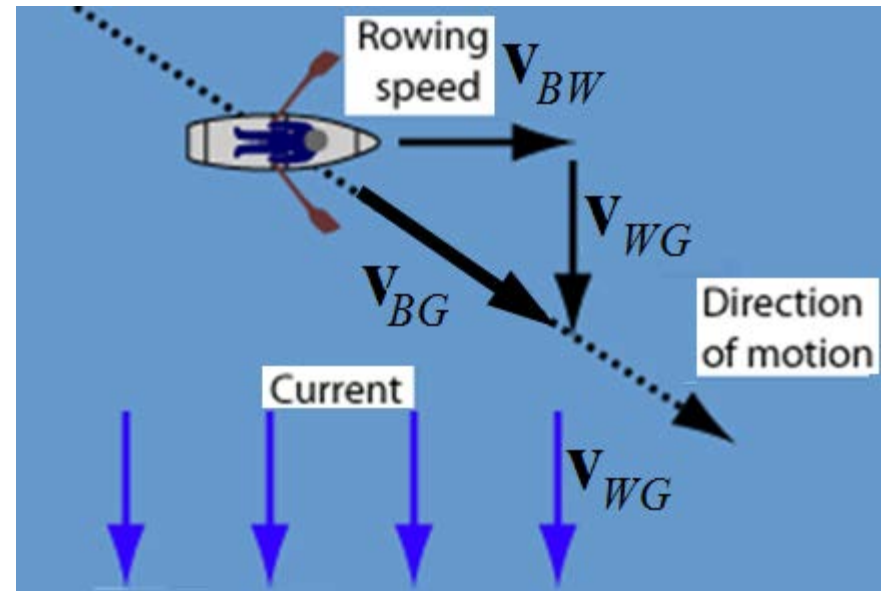
$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}$$

한 기준틀에 있는 관찰자가 측정한 입자의 가속도는 그 기준틀에 대해 등속도로 상대운동하는 다른 관찰자가 측정한 가속도와 같다.

$$\mathbf{u}_{PA} = \mathbf{u}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} \implies \mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$



$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{AG}$$



$$\mathbf{v}_{BG} = \mathbf{v}_{BW} + \mathbf{v}_{WG}$$

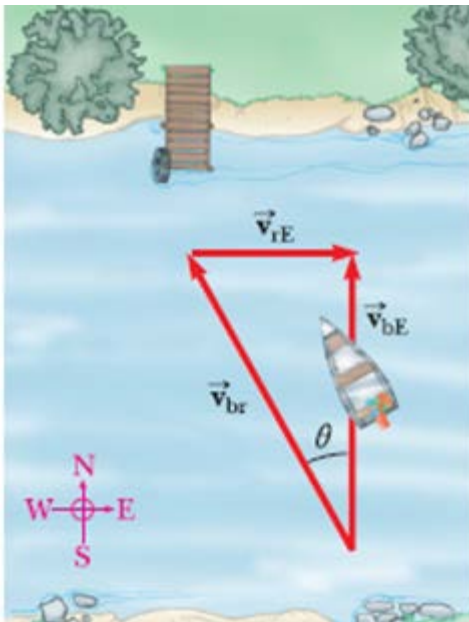
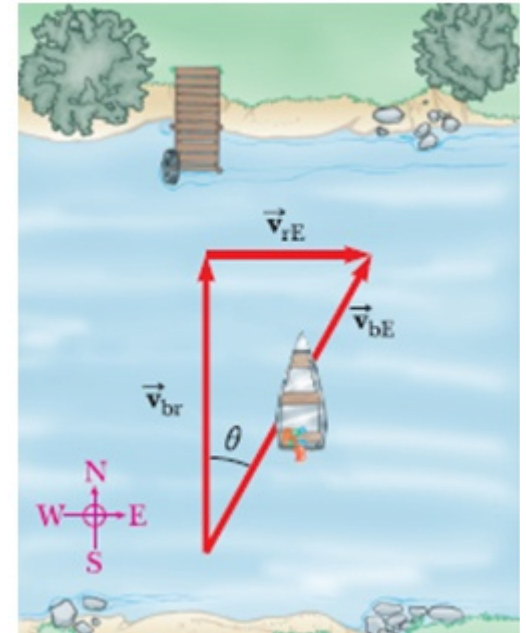
예제 3.6 강을 가로질러 가는 배

넓은 강을 건너는 배가 물에 대해 상대적으로 10.0km/h의 속력으로 움직인다. 강물은 지구에 대해 동쪽으로 5.00km/h의 일정한 속력으로 흐르고 있다. (A) 만약 배가 북쪽을 향하고 있다면, 강둑에서 있는 관찰자에 대한 배의 상대 속도를 구하라. (B) 만약 최단거리로 북쪽으로 이동하려 한다면, 배가 향해야 하는 방향은?

$$\mathbf{V}_{bE} = \mathbf{V}_{br} + \mathbf{V}_{rE}$$

$$(A) \quad v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0)^2 + (5.00)^2} = 11.2 \text{ km/h}$$

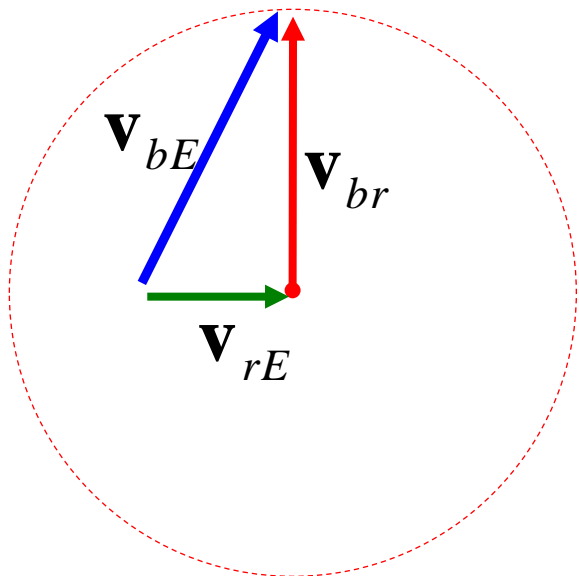
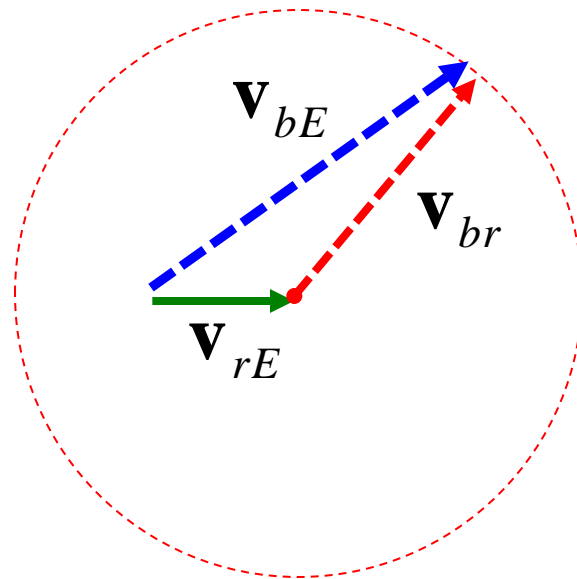
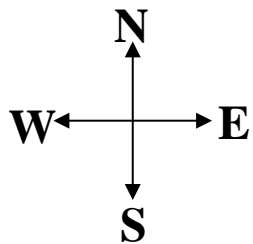
$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{rE}}{v_{br}} = \tan^{-1} \left(\frac{5.00}{10.00} \right) = 26.6^\circ$$



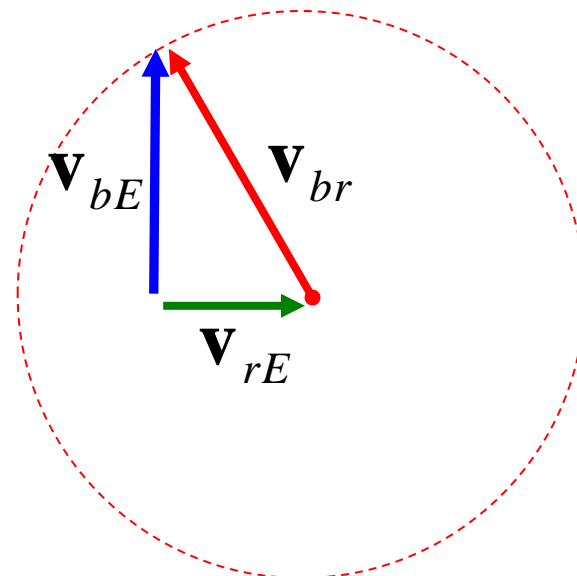
$$(B) \quad v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0)^2 - (5.00)^2} = 8.66 \text{ km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{rE}}{v_{bE}} = \tan^{-1} \left(\frac{5.00}{8.66} \right) = 30.0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bE} = \mathbf{V}_{br} + \mathbf{V}_{rE}$$



최단 시간에 건너기



최단 거리로 건너기

3장. 숙제 Homework problems

문제번호	관련 내용
4	등가속도운동, 벡터의 합성
6	포물선 운동
21	상대속도